

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ

Ордена Трудового Красного Знамени

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Московский технический университет связи и информатики»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

ПО ВЫПОЛНЕНИЮ

Лабораторной работы № 17

**ОПТИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ**

УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

«Общая теория связи»

Москва - 2015

План УМД на 2015/2016 уч. г.

Лабораторная работа № 17
ОПТИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Составители: Н.М. Наумов, доцент
В.Н.Молчанов, ст. преподаватель

Рецензент А.С.Сухоруков, доцент

Издание утверждено советом ОТФ -2.
Протокол № 1 от 31 августа 2015 г.

1. Цель работы

1.1 Экспериментальное исследование процессов, протекающих в оптимальном фильтре детерминированных сигналов.

1.2. Закрепление теоретических знаний по теме: «Оптимальная фильтрация сигналов», а также ознакомление с методами расчета и анализа характеристик согласованного фильтра.

2. Домашнее задание (ДЗ)

2.1. Изучить материал по оптимальной фильтрации детерминированных сигналов по рекомендованной литературе.

2.2. Рассчитать и построить график амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) фильтра, согласованного с одиночным прямоугольным импульсом длительностью 1 мкс.

2.3. Рассчитать и построить временные диаграммы напряжений (рис.1):

а) на выходе фильтра, имеющего импульсную реакцию, $g_1(t)$ при подаче на его вход импульса прямоугольной формы $S_1(t)$ длительностью 1 мкс;

б) на выходе фильтра, имеющего импульсную реакцию $g_2(t)$, согласованного с сигналом $S_2(t)$, поступающего на его вход. Варианты сигнала $S_2(t)$ представляющего собой последовательность прямоугольных импульсов единичной амплитуды и разной полярности, приведены в таблице. Длительность сигналов 2 мкс;

в) на выходе согласованного фильтра, представляющего последовательно включенные фильтры $g_1(t)$ и $g_2(t)$ при подаче на вход сигнала $s_2(t)$.

2.4. Рассчитать и построить временной график на выходе фильтра, согласованного с 2-разрядным кодом Баркера 1,1,1,-1, -1,-1,1, -1,-1, 1, -1, при подаче на его вход этого же сигнала.

2.5. Методом подбора найти сигнал $g_3(t)$, который “почти ортогонален” сигналу $S_2(t)$. Затем построить временной график напряжения на выходе фильтра, согласованного с $S_2(t)$, для подачи на его вход сигнал $S_3(t)$.

2.6. Определить минимально допустимое отношение сигнала к шуму (по мощности) на входе фильтра, согласованного с сигналом $S_2(t)$ при котором обеспечивается вероятность правильного обнаружения сигнала решающим устройством на выходе согласованного фильтра и указанного в таблице. Порог обнаружения равен половине максимального напряжения сигнала на выходе согласованного фильтра.

Таблица 1. Данные для домашнего задания

№ стенда		Вероятность правильного обнаружения
1	1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1	0,998
2	1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, 1	0,992
3	-1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, -1	0,940
4	1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, 1	0,980
5	1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, 1	0,990
6	-1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, 1	0,999
7	-1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, 1, -1	0,960
8	-1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, -1	0,996
9	1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, -1	0,985
10	1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1	0,900
11	1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 1	0,965
12	1, -1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1	0,997

Примечание: длительность элементарного импульса $\tau = 1 \text{ мкс}$, длительность сложного сигнала $T = 11 \text{ мкс}$.

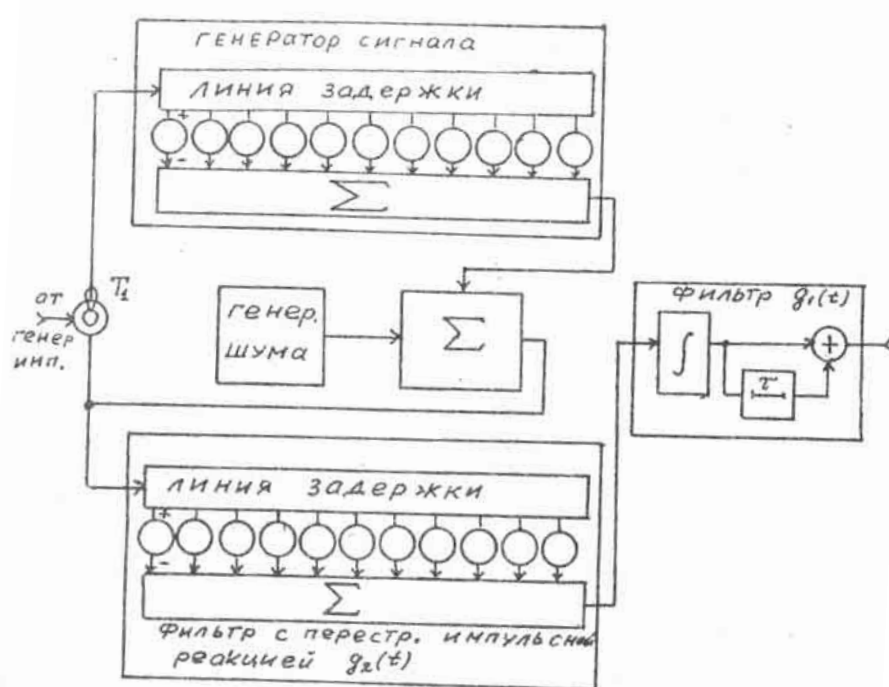


Рис. 1 Схема лабораторной установки

3. Описание лабораторной установки

Основными функциональными узлами лабораторной установки, схема которой приведена на рис. 1 являются:

- а) генератор микроструктурных импульсов;
- б) генератор сигналов на многосекционной линии задержки с 11 отводами, позволяющей формировать любой сложный 11 - разрядный сигнал длительностью 11мкс;
- г) фильтр с перестраиваемой импульсной реакцией $g_2(t)$ на многосекционной линии задержки с 11 отводами, допускающий настройку на прием любого сигнала, вырабатываемого генератором сигналов;
- г) фильтр, имеющий импульсную реакцию $g_1(t)$ и согласованный с элементарным импульсом длительности 1мкс; последовательное соединение фильтров $g_1(t)$ и $g_2(t)$ образует фильтр согласованный со сложным сигналом;
- д) генератор шума с почти равномерной спектральной плотностью мощности в полосе частот до 2-3 МГц; мощность шума постоянна, поэтому регулировку отношения сигнала к шуму на входе фильтра следует производить, изменяя величину импульсов сигнала;
- е) генератор гармонического сигнала высокой частоты, предназначенный для снятия амплитудно-частотной характеристики согласованного фильтра;
- ж) электронный вольтметр переменного тока для измерения на выходе согласованного фильтра при снятии его АЧХ;
- з) электронный осциллограф.

Настройка генератора сигналов и фильтра с перестраиваемой импульсной реакцией $g(t)$ на заданный сигнал производится с помощью 11 тумблеров, изменяющих полярности импульсов на отводах линии задержки. При этом следует иметь в виду, что согласование фильтра с сигналом достигается, когда порядок включения тумблеров фильтра обратен порядку включения тумблеров генератора сигналов.

Тумблер T_1 служит для переключения импульсов, поступающих от генератора микросекундных импульсов на вход генератора сигнала или на вход фильтра с перестраиваемой импульсной реакцией. Последнее требуется для наблюдения импульсной реакции этого фильтра с помощью осциллографа. Напряжение входных импульсов устанавливается 1-2 В. При этом рекомендуется использовать делитель 1:10, имеющийся в генераторе импульсов. Длительность входных импульсов 1мкс.

При снятии АЧХ фильтров входное синусоидальное напряжение устанавливается равным 1 В (по вольтметру генератора), характеристики снимаются в диапазоне частот 0,1 - 3 МГц.

4. Лабораторное задание

4.1. Формирование сигналов заданной формы.

С помощью генератора сигналов сформировать нижеперечисленные сигналы и зарисовать их осциллограммы:

- а) прямоугольный импульс длительностью 1 мкс;
- б) сигнал $S_2(t)$ из домашнего задания;
- в) пачка импульсов 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1;
- г) код Баркера 1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, -1.

Длительность элементарных импульсов от генератора Г5-15 1 мкс, частота повторения 4 кГц.

4.2. Формирование импульсной реакции согласованного фильтра.

- а. Сформировать необходимую для согласованной фильтрации каждого из сигналов п.4.1 импульсную реакцию $g_2(t)$ и зарисовать осциллограммы напряжения на выходе этого фильтра, подавая на его вход импульсы 1 мкс длительности от генератора микросекундах импульсов.
- б. Зарисовать осциллограмму импульсной реакции фильтра, согласованного с элементарным импульсом.
- в. Зарисовать осциллограммы импульсных реакций полного согласованного фильтра для сигналов п.4.1 б и п.4.1 г и объяснить роль фильтра $g_1(t)$.

4.3. Наблюдение свертки сигнала в согласованном фильтре.

Последовательно сформировать сигналы из п.4.1 и структуры согласованных с ними фильтров и зарисовать осциллограммы напряжения на выходе полного согласованного фильтра для всех сигналов п.1. Следует иметь в виду, что полярность сигнала изменяется на обратную в сумматоре, и для наблюдения неперевернутой свертки следует изменить на обратную полярность входных микросекундах импульсов.

При выполнении этого пункта выяснить роль фильтра $g_1(t)$ в формировании полного отклика.

4.4. Наблюдение подавления ортогонального сигнала в согласованном фильтре.

Сформировать сигнал $S_2(t)$ и импульсную реакцию фильтра, согласованного с сигналом $S_2(t)$ из домашнего задания. Подать на генератор сигнала запускающие микросекундные импульсы и зарисовать осциллограмму на выходе полного фильтра. По осциллограмме отметить момент времени, соответствующий концу входного сигнала.

4.5. Снять амплитудно-частотную характеристику фильтра, согласованного с элементарным импульсом. Факультативно снять АЧХ фильтра, согласованного с сигналом п.4.1в.

4.6. Наблюдение принципа выделения сигнала из шума согласованным фильтром.

Сформировать сигнал п.4.1.г и импульсную реакцию согласованного с ним фильтра. Установить максимальный уровень входного импульсного сигнала, при котором еще не наблюдается искажение сигнала (наблюдение производить на экране осциллографа при отсутствии шума) на выходе фильтра. Включить генератор шума на макете. Зарисовать осциллограмму выходного напряжения согласованного фильтра.

Затем снизить уровень сигнала в 2 раза и вновь зарисовать сигнал на экране осциллографа. Сравнить указанные сигналы и сделать выводы.

Для первого и второго входных сигналов рассчитать отношение сигнала к шуму $h = \frac{A}{G_x}$, где A - размах сигнала на экране осциллографа при отсутствии шума, G_x - среднеквадратическое значение шума на выходе сумматора при отсутствии сигнала.

Среднеквадратическое значение шума относительно можно определить следующим образом. Не изменяя масштаба канала вертикального положения осциллографа, замерить максимальный размах шумового сигнала на экране B . С учетом того, что для белого шума найдем отношение сигнала к шуму $B = 3G_k$, найдем отношение сигнала к шуму

$$h = \frac{3A}{B}$$

5. Содержание отчета

5.1. Функциональная схема генератора сигнала и согласованного фильтра.

5.2 . Результаты домашнего расчета.

- 5.3. Структурные схемы измерений согласно пунктам лабораторного задания.
- 5.4. Экспериментальные данные.
- 5.5. Анализ и объяснение всех полученных результатов.

6. Вопросы для подготовки к работе

- 6.1. Каковы критерии оптимальной линейной фильтрации сигналов на фоне шумов?
- 6.2. Какие фильтры называются согласованными?
- 6.3. Каков характер АЧХ и ФЧХ согласованного фильтра?
- 6.4. Какой вид имеет импульсная характеристика согласованного фильтра? Пояснить на одном из примеров.
- 6.5. Что влияет на отношение сигнала к шуму на выходе согласованного фильтра?
- 6.6. В чем разница при оптимальной фильтрации детерминированных и случайных сигналов?
- 6.7. Какие ограничения накладываются на сигнал и шум для получения согласованной фильтрации?
- 6.8. Какова форма сигнала на выходе согласованного фильтра? Пояснить на примере.
- 6.9. Особенность построения оптимального фильтра при небелой помехе.
- 6.10. Код Бартера и его свойства.
- 6.11. Временная диаграмма сигналов на выходе фильтра, согласованного с кодом Бартера.
- 6.12. Функциональная схема фильтра, согласованного с одиночным прямоугольным импульсом.
- 6.13. Функциональная схема фильтра, согласованного с пятиразрядным кодом Бартера.
- 6.14. Требование к автокорреляционной функции сигнала, выделяемого на фоне шума согласованным фильтром.
- 6.15. Принцип построения согласованного фильтра для сигналов сложной формы (форма сигналов отличается от прямоугольной).
- 6.16. Какие фильтры называют квазиоптимальными? Привести пример подобного фильтра.

7. Литература

- 7.1. И.С. Гоноровский. Радиотехнические цепи и сигналы.- М.: Радио и связь, 1986 , с.396-416.
- 7.2. ЗокоА.Г., Кловский Д.Д., Назаров М.В., ФинкЛ.М. Теория передачи сигналов. - М.: Связь, 1960 , с.131-138.
- 7.3. Лахти Б.Ц. Системы передачи информации. М.: Связь, 1971 с . 297-307.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

1. Краткие сведения из теории оптимальной линейной фильтрации детерминированных сигналов.

Оптимальным фильтром детерминированного сигнала на фоне стационарного шума называют такие линейные фильтры, у которых отношение пиковой модности сигнала и средней мощности шума на выходе максимально. Оптимальные фильтры, у которых в пределах ширины спектра детерминированного сигнала спектральная плотность шума равномерна, называется согласованными фильтрами.

Согласованные фильтры могут строиться только для финитных сигналов, т.е. сигналов, ограниченных по времени ($t \leq T$, где T - длительность сигнала). Передаточная функция согласованного фильтра определяется выражением:

$$\dot{K}_{cf} = \dot{S}^*(\omega)e^{-j\omega t_0} \quad (1)$$

где $\dot{S}^*(\omega)$ - комплексно-сопряженный спектр сигнала, t_0 - момент времени, в котором оценка отношения сигнала к шуму (принимается решение в приеме сигнала). На практике $t_0 = T$.

Из выражения (1) можно найти АЧХ (амплитудно-частотную характеристику) и ФЧХ (фазочастотную характеристику) согласованного фильтра, которые имеют вид:

$$\begin{aligned} |\dot{K}_{cf}(\omega)| &= |\dot{S}(\omega)|, \\ \varphi_{cf}(\omega) &= -(\varphi(\omega) - \omega t_0) \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varphi_{cf}(\omega)$ - фазочастотный спектр сигнала, $\dot{S}(\omega)$ - комплексный спектр сигнала.

Используя обратное преобразование Фурье от передаточной функции, и учитывая, что $\dot{S}(\omega) = \dot{S}(-\omega)$ можно найти импульсную характеристику согласованного фильтра

$$\begin{aligned}
g_{c\phi}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{c\phi}(\omega) e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(-\omega) e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(-\omega) e^{-j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{-j\omega(t-t_0)} d\omega = S(t_0 - t)
\end{aligned}$$

Таким образом

$$g_{c\phi}(t) = S(t_0 - t) \quad (3)$$

Импульсная характеристика согласованного фильтра является зеркальным отражением сигнала и сдвинута относительно начала импульса на время t_0 . Из условия физической реализуемости фильтра должно выполняться условие $t_0 \geq T$, где T – длительность сигнала. Этим объясняется требования к финитности сигнала при их оптимальной фильтрации.

Таким образом, для подобных фильтров должны выполняться следующие условия:

$$|\dot{K}_{c\phi}(\omega)| = |\dot{S}(\omega)|, \quad g_{c\phi}(t) = S(t_0 - t), \quad t_0 \geq T \quad (4)$$

Такие фильтры называются согласованными с сигналом в частотной и временной областях. В частотной области АЧХ фильтра повторяет форму модуля спектра сигнала, а во временной области – импульсная реакция является зеркальным отображением формы сигнала. Отсюда и название фильтров такого рода.

2. Отношение сигнала к шуму на выходе фильтра

Отклик оптимального фильтра на воздействие детерминированного сигнала может быть получен как свертка входного сигнала с импульсной реакцией фильтра. При учете (4) получим:

$$\begin{aligned}
y_g(t) &= \int_0^t S(v) g(t-v) dv = \int_0^t S(v) g(T-t-v) dv \\
y_g(t) &= B_{ss}(T-t)
\end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, отклик фильтра, согласованного с входным детерминированным сигналом, равен автокорреляционной функции сигнала $B_{ss}(T-t)$.

В момент времени $t = T$ корреляционная функция становится равной энергии сигнала E_s , $B_{ss}(0) = E_s$.

Для нахождения соотношения сигнала к шуму необходимо получить среднюю мощность шума на выходе фильтра. Для стационарного шума с рав-

номерной спектральной плотностью мощности G_o средняя мощность может быть определена с использованием обратного преобразования Винера-Хинчина

$$\begin{aligned}\overline{y_n^2(t)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_o |\dot{K}_{c\phi}(\omega)|^2 d\omega = G_o \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{K}_{c\phi}(\omega)|^2 d\omega \right] = \\ &= G_o \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega \right], \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega = E_s, \overline{y_n^2} = G_o E_s\end{aligned}\quad (6)$$

Отсюда отношение сигнала к шуму на выходе фильтра будет равно

$$h_{c\phi}^2 = \frac{y_s^2(T)}{y_n^2(t)} = \frac{E_s^2}{C_o E_s} = \frac{E_s}{C_o} \quad (7)$$

Нужно найти эффективность оптимальной фильтрации (величину выигрыша) как частное от условия отношения сигнала к шуму на выходе фильтра к отношению сигнал/шум на его входе - h_{ex}^2 .

$$\gamma = \frac{h_{ex}^2}{h_{c\phi}^2} = \frac{h_{y\ c\phi}^2}{h_{ex}^2} \quad (8)$$

Отношение мощностей сигнала и шума на входе зависит от характера шума и эффективной полосы частот сигнала $2 \cdot \Delta f_s$. Для белого шума с постоянной спектральной плотностью мощности это отношение будет равно

$$h = \frac{P_s}{P_u} = \frac{E/T}{G_o 2 \cdot \Delta f_s} = \frac{E_s}{G_o} \cdot \frac{1}{2 \cdot \Delta f_s \cdot T} \quad (9)$$

Следовательно, с учетом (7) и (8) найдем

$$\gamma = 2 \cdot \Delta f_s \cdot T \quad (10)$$

Произведение эффективной полосы сигнала на его длительность называют базой сигнала. Таким образом, выигрыш в отношении сигнала к шуму для согласованных фильтров пропорционален базе сигнала.

Если сигнал представляет собой одиночный прямоугольный импульс, то выигрыш при согласованной фильтрации будет равен двум.

Для сигнала, представлявшего собой пачку из n одинаковых прямоугольных импульсов, соответственно получим: $\gamma = 2n$.

3. Вероятность правильного обнаружения сигнала

Вероятность обнаружения сигнала $p_{обн}$ будет определяться условной вероятностью

$$p_{обн} = p(s / s) = \int_{\alpha_{опт}}^{\infty} p(y / s) dy$$

где $p(y / s)$ - функция плотности вероятности напряжения на входе согласованного фильтра при действии на его вход суммы сигнала и шума

$$p(y / s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi G_o E_s}} e^{-\frac{(y-E_s)^2}{G_o E_s}}$$

$\alpha_{опт}$ - оптимальный порог решающего устройства, равный половине $y_s(T)$, когда априорная вероятность передачи сигнала $P_s = 0,5$.

Производя замену переменной

$$Z = \frac{y - E_s}{\sqrt{G_o E_s}}$$

Получим:

$$P(y / g) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\sqrt{E_s/G_o}}{2}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

График зависимости вероятности правильного обнаружения от значения E_s / G_o , построенный по последней формуле, приведен на рис, 2.

Но графику (рис.2) для заданной вероятности правильного обнаружения сигнала можно найти требуемое отношение сигнала к шуму на выходе фильтра, а зная форму оригинала - необходимое отношение сигнала к шуму на входе фильтра.

Если сигнал представляет собой пачку из n_s разнополярных импульсов одинаковой амплитуды, то энергия всего сигнала будет равна $E_s = nE_{s1}$, где E_{s1} - энергия одиночного прямоугольного импульса. Тогда отношение сигнала к шуму на входе фильтра определяется выражением

$$h_{ex} = \frac{P_c}{P_{ш}} = \frac{E_s G_o}{2n}$$

4. Синтез функциональной схемы согласованного фильтра

Фильтр, согласованный с импульсными сигналами, используемыми в данной работе, синтезируется следующим образом. Состоящий из n одинаковых элементарных импульсов $f(t)$ высотой S_k сложный сигнал выражается как

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n-1} S_k \int_0^T f(t - k\tau) e^{-j\omega t} = \dot{F}(\omega) \sum_{k=0}^{n-1} g_k e^{-j\omega \tau}$$

где $\dot{F}(\omega)$ - преобразование Фурье импульса $f(t)$.

Фильтр, согласованный с сигналом $S(t)$ имеет передаточную функцию

$$\dot{K}_{cf}(\omega) = \dot{S}^*(\omega) e^{-j\omega T} = \dot{F}(\omega) e^{-j\omega \tau} \sum_{k=0}^{n-1} s_k e^{-j(n-k-1)\tau} = \dot{K}_1(\omega) \dot{K}_2(\omega)$$

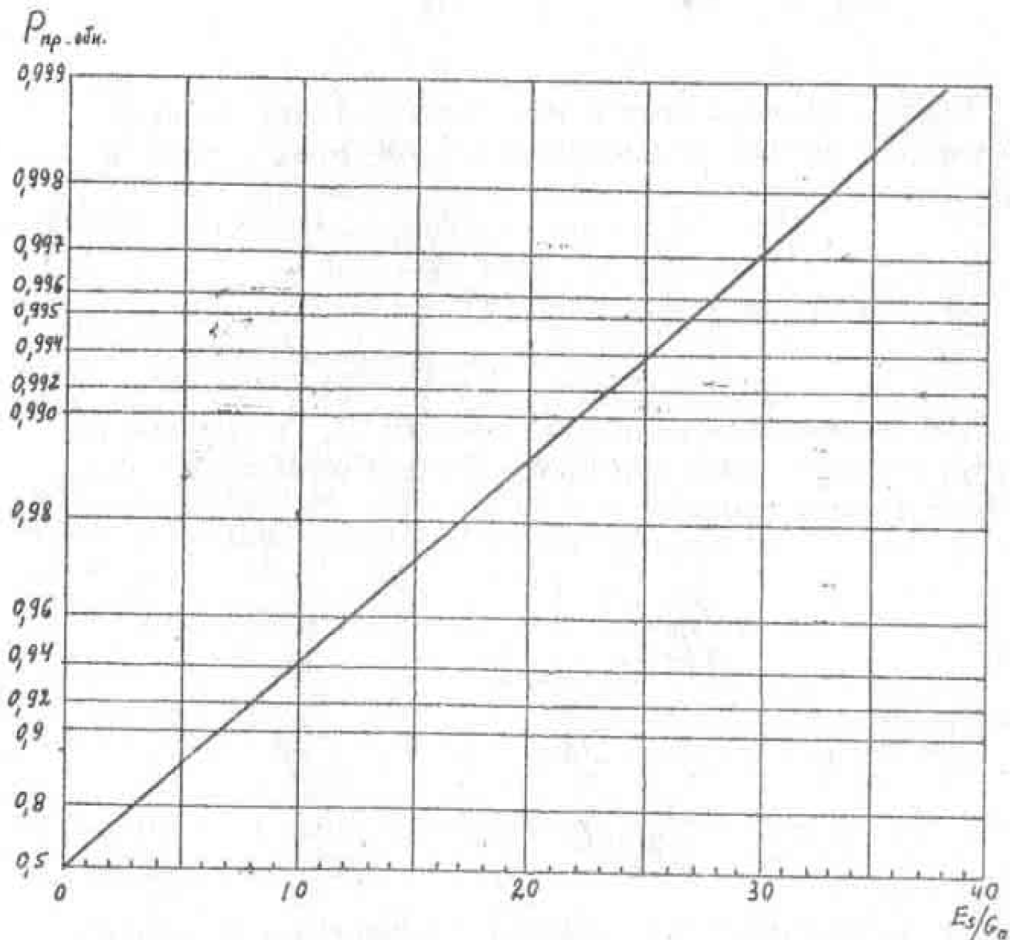


Рисунок 2. Зависимость вероятности правильного обнаружения от E_s / G_0 .

В последнем выражении $\dot{K}_1(\omega) = \dot{F}(\omega)e^{-j\omega\tau}$ - передаточная функция фильтра, согласованного с элементарным импульсом;

$$\dot{K}_2(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} g_k e^{-j\omega(n-k-1)\tau}$$

передаточная функция многосекционной линии задержки с весовыми коэффициентами $s_k = \pm 1$ в отводах, причем меньшим значениям S_k соответствует большая задержка $(n-k-1)\tau$.

На основании выражений для передаточных функций построены фильтры, Функциональные схемы которых приведены на рис. 1.

Коды Баркера

Коды Баркера принадлежат к сигналам, представлявшим собой последовательность разнополярных импульсов прямоугольной формы единичной амплитуды, имевших совершенную (в определенном смысле) автокорреляционную функцию АКФ. АКФ этих сигналов является дискретной функцией $B_{ss}(n)$, которая в нуле пропорциональна количеству символов в сигнале $B_{ss}(0) = n$, а в другие дискретные моменты времени не превосходит единицы.

В качестве примера на рис. 3 приведен вид 5 -позиционного кода Баркера, а также графическое представление его АКФ.

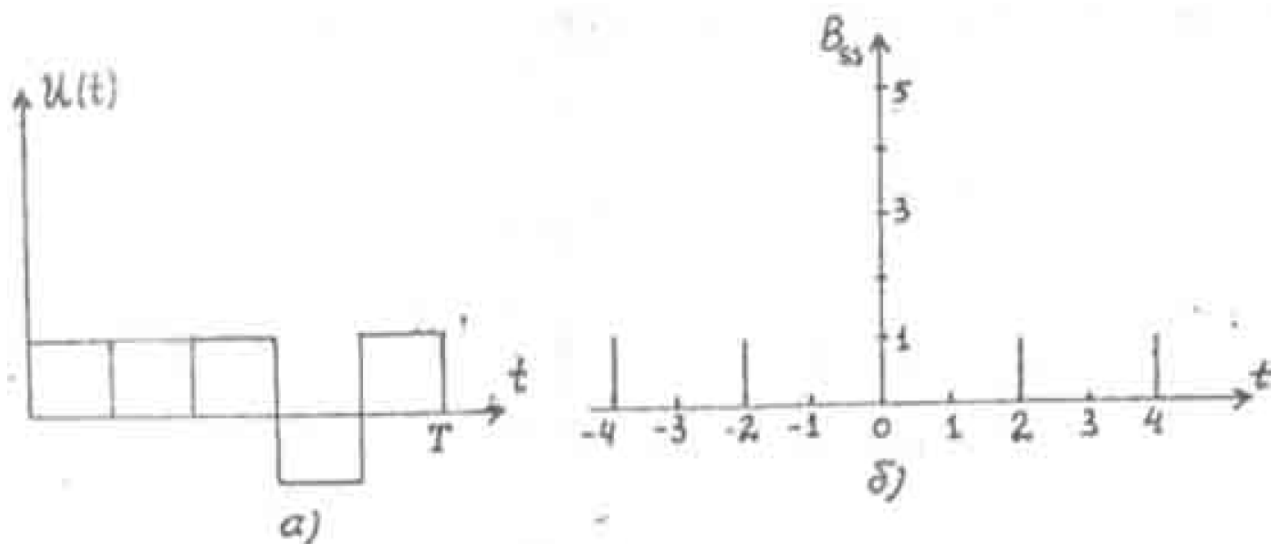


Рисунок 3. Код Баркера (а) и его АКФ(б)

Возможные сигналы Баркера и их АКФ приведены в таблице 2.

Таблица 2. Коды Баркера и АКФ

№	Модель сигнала	АКФ
3	1,1, -1	3. 0, -1
4	1, 1, 1, -1	4. 1, 0, -1
	1, 1, -1, 1	4. -1, 0, -1
5	1, 1, 1, -1, 1	5. 0, 1, 0, 1
7	1, 1, 1, -1, -1, 1, -1	0. -1, 0, -1, 0, -1
11	1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, 1, 1	11. 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1
13	1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, 1	13. 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1

